Zjištění odchylky přibližného řešení rovnic Foucaultova kyvadla od řešení přesného

J. Zajíčková, J. Marian
Gymnázium Františka Palackého, Valašské Meziříčí
Gymnázium Litoměřická, Praha
janaave@centrum.cz, jakub.marian@matfyz.cz

Abstrakt:

Určili jsme rozdíl v přesnosti řešení rovnic popisujících chování Foucaultova kyvadla. První typ řešení využívá aproximovaných pohybových rovnic, které se užívají k řešení v kvadraturách. Druhý typ využívá numerického řešení pohybových rovnic. Dokázali jsme, že první řešení je použitelné pro naprostou většinu kyvadel používaných na Zemi a odchylka od numerického, přesnějšího řešení není významná.

1 Foucaultovo kyvadlo

Nejdříve je nutné osvětlit pojem Coriolisova síla - je to nepravá síla „působící“ v rotující neinerciální vztažné soustavě na tělesa mající nenulovou složku rychlosti kolmou k ose rotace. K demonstraci této síly slouží zařízení zvané Foucaultovo kyvadlo. Během jeho pohybu na něj působí díky rotaci Země velmi malá (Coriolisova) síla. To způsobí postupné stáčení roviny kyvu, které je však možné po delším časovém intervalu pozorovat i pouhým okem.

Pohybová rovnice Foucaultova kyvadla

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\omega \sin\gamma \frac{dy}{dt} = \lambda x \tag{1}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\omega \sin\gamma \frac{dx}{dt} + 2\omega \cos\gamma \frac{dz}{dt} = \lambda y \tag{2}$$

$$g + \frac{d^2 z}{dt^2} - 2\omega \cos\gamma \frac{dy}{dt} = \lambda (z - l) \tag{3}$$

Tyto rovnice plně popisují pohyb kyvadla v tíhovém poli Země (viz [1], strana 632). Parametr λ je vazebný parametr zajišťující vazebnou sílu, kterou na závaží kyvadla působí jeho závěs. Dále musíme splnit podmínku

$$x^2 + y^2 + (z-l)^2 - l^2 = 0 \tag{4}$$

která vyjadřuje, že se závaží pohybuje pouze po kulové ploše. V algebraickém řešení jsou několika podmínkami odvozeny rovnice, ze kterých je možné vypočítat jednotlivé členy. V tomto řešení se pro zjednodušení nakonec zanedbají některé veličiny, aby bylo možné soustavu algebraicky řešit. Vyjde poměrně jednoduchá soustava dvou diferenciálních rovnic o dvou neznámých funkcích, která je řešitelná v kvadraturách (viz [1], strana 633):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2\omega \sin\gamma \frac{dy}{dt} - \frac{g}{l} x \qquad (5)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -2\omega \sin\gamma \frac{dx}{dt} - \frac{g}{l} y \qquad (6)$$

Dnes však již máme možnost při řešení diferenciálních rovnic použít výkonné počítače. Je tedy možné řešit rovnice v původním neaproximovaném tvaru, ač pouze numerickým výpočtem. Tento výpočet je však natolik přesný, že možná chyba je naprosto zanedbatelná a prakticky nezjistitelná. Pro numerické řešení vyjdeme z původní soustavy pohybových rovnic. První krok spočívá ve vyloučení parametru λ z rovnic (1), (2) a (3). Provedeme to odečtením x-násobku rovnice (2) od y-násobku rovnice (1) a odečtením x-násobku rovnice (3) od (z-l)-násobku rovnice 1. Získáme tak 2 diferenciální rovnice o třech neznámých:

$$y \frac{d^2 x}{dt^2} - 2\, y\, \omega \sin\gamma \frac{d\, y}{dt} - x \frac{d^2 y}{dt^2} - 2\, x\, \omega \sin\gamma \frac{dx}{dt} - 2\, x\, \omega \cos\gamma \frac{dz}{dt} = 0 \qquad (7)$$

$$z \frac{d^2 x}{dt^2} - 2\, z\, \omega \sin\gamma \frac{d\, y}{dt} - l \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\, l\, \omega \sin\gamma \frac{dy}{dt} - gx - x \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\, x\, \omega \cos\gamma \frac{dy}{dt} = 0 \qquad (8)$$

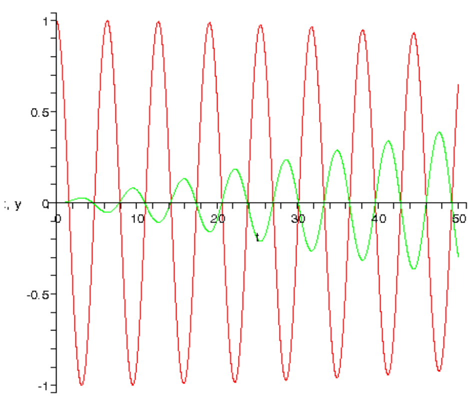
Z podmínky (4) lze odvodit závislost souřadnice z na x a y:

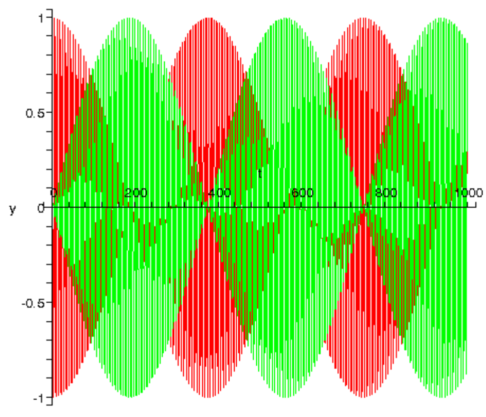
$$z(x, y) = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} + l \qquad (9)$$

Znaménko mínus před odmocninou je nutné uvést, aby byla splněna podmínka z(0,0) = 0. Takto získanou závislost dosadíme za z vystupujícím v rovnicích (7), (8). Výsledná soustava rovnic je velmi složitá, pravděpodobně není algebraicky řešitelná, nebudeme ji zde uvádět, vyjdeme z ní však při numerickém řešení v počítačovém systému Maple 9.

2 Výsledky výpočtů

K numerické aproximaci byla použita Runge-Kutteova metoda. Výstupem programu Maple byly aproximované funkce souřadnic x(t) a y(t). Na obrázku je možné vidět průběh těchto funkcí v závislosti na čase. Amplituda x-ové souřadnice s časem klesá, amplituda y-nové souřadnice roste. Z Z toho můžeme usoudit, že se rovina kyvu postupně stáčí. Další obrázek zobrazuje stejný proces, ovšem v daleko větším časovém intervalu. Ve chvíli, kdy je kývání v x-ovém směru maximální, kyv probíhá rovnoběžně s osou x a výchylka ve směru osy y je nulová. Obdobně, pokud je kývání ve

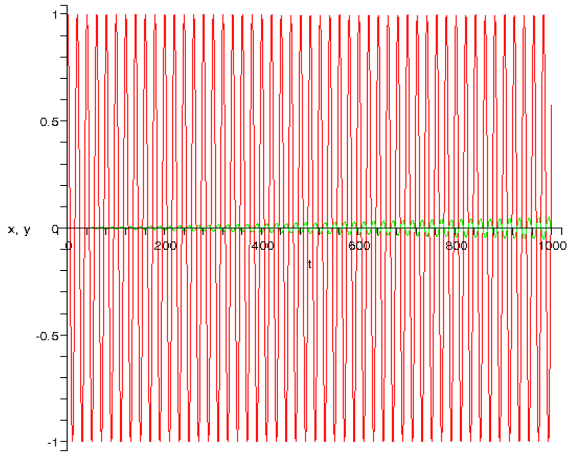




směru osy y maximální, je výchylka ve směru osy x nulová.

3 Foucaultovo kyvadlo v soustavě souřadnic spojené se Zemí

Pro numerickou aproximaci použijeme hodnoty l = 100 m, g = 9.81 m/s^2, γ = 45°, ω = 2*π/(60*60*24) = 7,272 * 10^{-5} s^{-1}, počáteční výchylka ve směru osy x je 1 m. Na obrázku vidíme závislost x a y na čase.

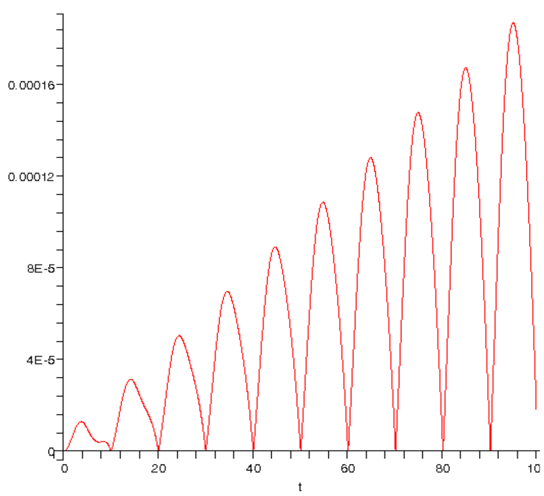


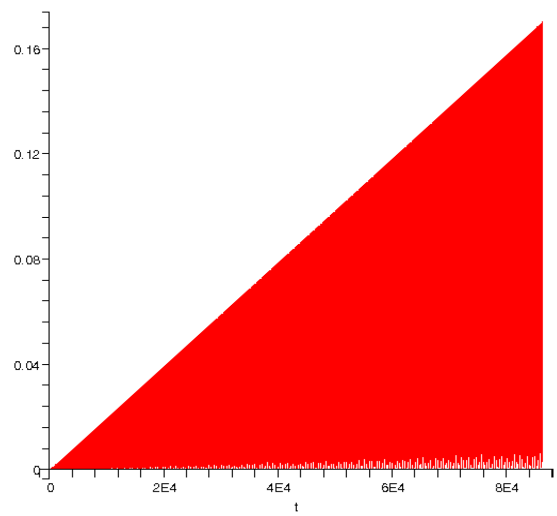
Vzniklá chyba při použití aproximace

Následující obrázky zobrazují vzdálenost mezi koncem „algebraicky zjednodušeného kyvadla“ a „přesného kyvadla“ v závislosti na čase na Zemi. Je dána vzorcem:

$$\sqrt{(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2}$$

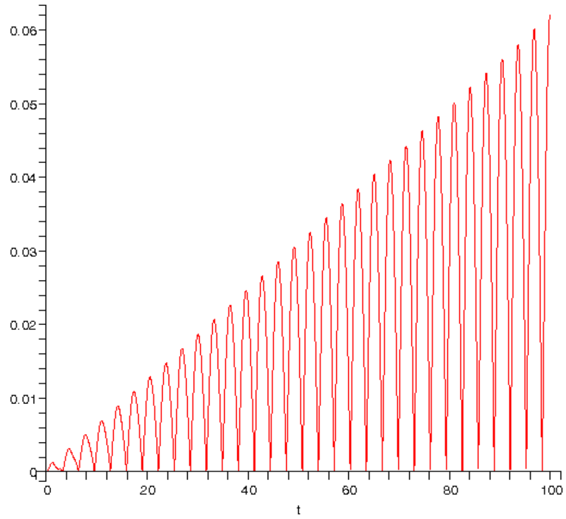
Každá „perioda maxim“ vyjadřuje zpoždění přibližného řešení vůči přesnému o dobu jedné periody (rozdíl doby kyvu zde tvoří hlavní část rozdílu vzdáleností).



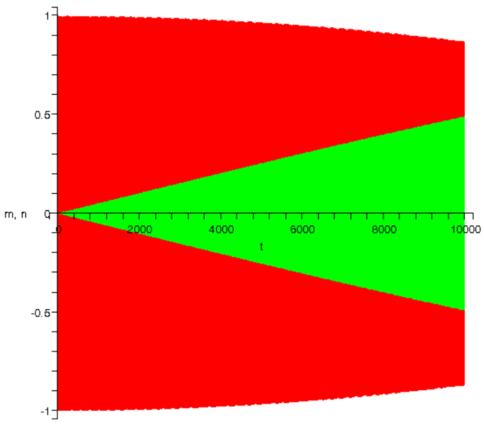


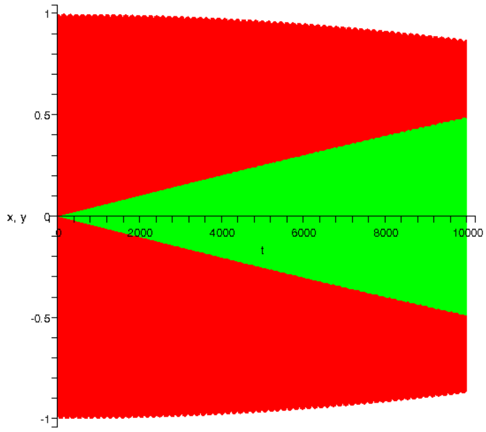
Z obrázků vidíme, že maximální vzdálenost kyvadel se mění lineárně.

Nyní zkusíme zkrátit délku kyvadla na 10m. Vzdálenost mezi konci kyvadel vyjadřuje obrázek:

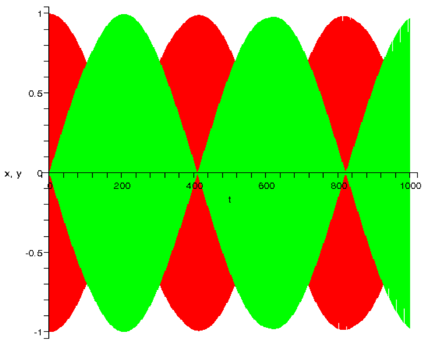


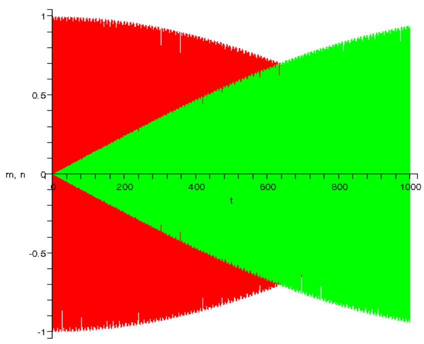
Když se však podíváme na dlouhodobý průběh x-ových a y-nových souřadnic, zjistíme, že nedochází k žádnému znatelnému posunu (obrázky zobrazují interval 10 000 s):





K výraznému posunu dojde, pokud razantně změníme podmínky – délka kyvadla zmenšíme na pouhé 1,3m, počáteční výchylku necháme na 1m, úhlovou rychlost Země zvedneme řádově stonásobně. Na následujících obrázcích je jasně patrný posun (obrázky jsou ve stejném měřítku, v obou je zaznamenán časový interval 1000 s).





Shrnutí

Numerickým řešením jsme ověřili, že v běžných podmínkách na povrchu Země je aproximovaná metoda dostatečně přesná. V „extrémních“ podmínkách v rychle se otáčejících soustavách a při pohybech, kde není možné zanedbat fakt, že se závaží kyvadla pohybuje po kružnici, již aproximace není vhodná.

Poděkování

Zde bychom chtěli poděkovat předně ČVUT a Fakultě Jaderné a Fyzikálně Inženýrské za to, že umožnili a finančně podpořili Fyzikální týden, díky němuž tento článek vůbec mohl vzniknout. Dále bychom chtěli poděkovat Ing. Svobodovi, CSc. za organizaci této akce, ale především našemu supervizorovi Ing. Jiřímu Hrivnákovi, bez jehož pomoci by tato práce určitě nevznikla.

Reference

[1] Trkal, V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa* NČSAV, Praha 1956
[2] Štoll, I., Tolar, J.: *Teoretická fyzika* Vydavatelství ČVUT, Praha 1999